Metrična geometrija

Definicija (funkcija udaljenosti)

Funkcija udaljenosti na skupu $\mathcal{S}$ je f-ja $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ takva da za sve $P, Q \in \mathcal{S}$

(i) $d(P,Q) \geq 0$;

(ii) $d(P,Q) = 0$ ako i samo ako $P = Q$; ;

(iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(#) Neka je $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ neprazan skup i neka je $d_M : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \{0, 1\}$ f-ja definisana na $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ na sljedeći način: $\forall P, Q \in \mathcal{M}$

$$d_M(P, Q) = \begin{cases} 1, & \text{ako } P \neq Q \\ 0, & \text{ako } P = Q \end{cases}$$

Provjeriti da li je d_M f-ja udaljenosti.

Rj: Trebamo provjeriti da li vrijede tri osobine iz definicije f-je udaljenosti. Neka su P i Q dvije proizvoljne tačke.

(i) $d(P, Q) \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ako je } P = Q \text{ tada } d_M(P, Q) = 0 \\ \text{Ako je } P \neq Q \text{ tada } d_M(P, Q) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d_M(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{M}$$

(ii) $d(P, Q) = 0$ ako i samo ako $P = Q$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{„}\Leftarrow\text{":} & P = Q \Rightarrow d_M(P, Q) = 0 \\ \text{„}\Rightarrow\text{":} & d_M(P, Q) = 0 \Rightarrow P = Q \end{array}\right\} \text{ vrijedi druga osobina}$$

(iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & P = Q \Rightarrow d_M(P, Q) = 0 = d_M(Q, P) \\ 2^\circ & P \neq Q \Rightarrow d_M(P, Q) = 1 = d_M(Q, P) \end{array}\right. \quad \text{vrijedi treća osobina.}$$

Data f-ja d_M jest f-ja udaljenosti.

(#) Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije tačke iz $\mathbb{R}^2$ i neka je $d_{max}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ f-ja definisana na sljedeći način

$$d_{max}(P, Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Provjeriti da li je d_{max} f-ja udaljenosti.

Rj. Trebamo provjeriti da li vrijede tri osobine iz definicije f-je udaljenosti. Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ proizvoljne tačke.

(i) $d(P, Q) \geq 0$

$$d_{max}(P, Q) = \max\{\underbrace{|x_1 - x_2|}_{\geq 0}, \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\geq 0}\} \Rightarrow d_{max}(P, Q) \geq 0$$

vrijedi prva osobina

(ii) $d(P, Q) = 0$ ako i samo ako $P = Q$

$$d_{max}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \max\{\underbrace{|x_1 - x_2|}_{\geq 0}, \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\geq 0}\} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 0 \text{ i } |y_1 - y_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2 \Leftrightarrow P = Q$$

vrijedi druga osobina

(iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$

$$d_{max}(P, Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = d(Q, P)$$

vrijedi treća osobina

F-ja d_{max} jest f-ja udaljenosti.

(#) Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije tačke iz $\mathbb{R}^2$ i neka je $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f-ja definisana na sljedeći način:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + 4(y_1-y_2)^2}$$

Provjeriti da li je d f-ja udaljenosti.

Rj.

(i) Provjerimo da li $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$d(P,Q) = \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4(y_1-y_2)^2}_{\geq 0}} \Rightarrow d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$$

(ii) Provjerimo da li $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

$$d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4(y_1-y_2)^2}_{\geq 0}} = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 = 0 \text{ i } 4(y_1-y_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2 \Leftrightarrow P = Q$$

vrijedi druga osobina

(iii) Provjerimo da li $d(P,Q) = d(Q,P)$. $(P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2))$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + 4(y_1-y_2)^2} \\ d(Q,P) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 4(y_2-y_1)^2} = \sqrt{((-1)(x_1-x_2))^2 + 4((-1)(y_1-y_2))^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d(P,Q) = d(Q,P)$$

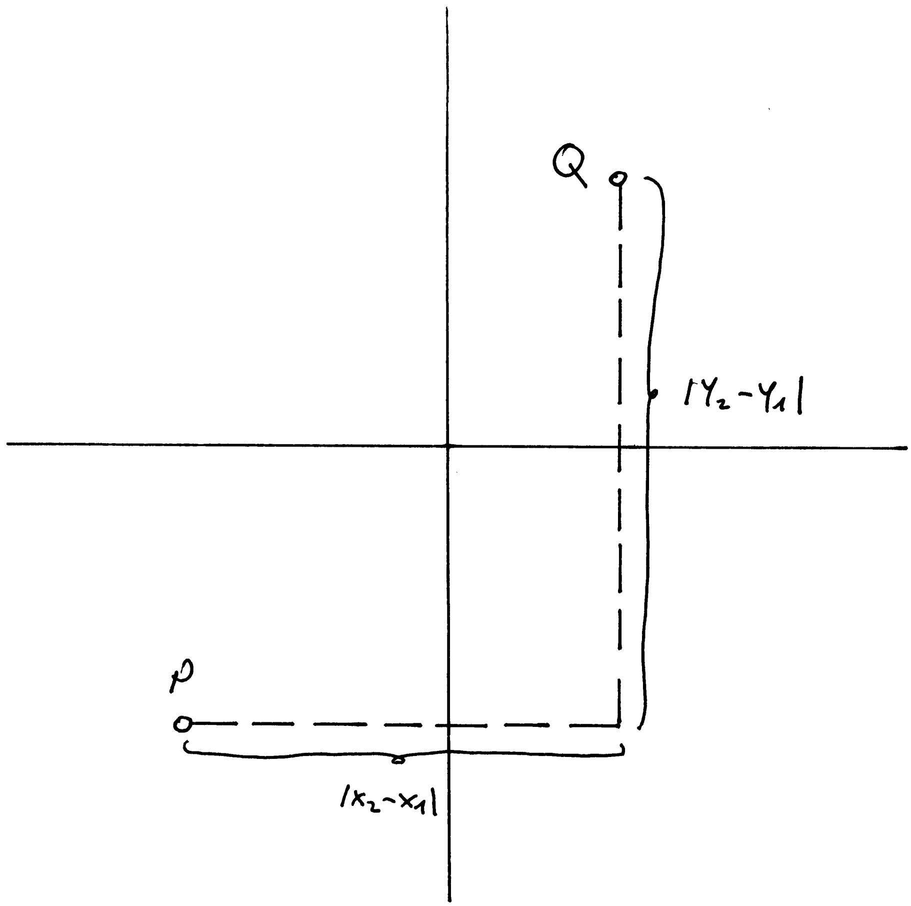
vrijedi treća osobina

F-ja d jest f-ja udaljenosti.

Definicija (taksicab udaljenost)

Neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ dvije tačke iz $\mathbb{R}^2$. Taksicab udaljenost između tačaka P i Q je data sa

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| .$$



(#) Pokazati da je taksicab udaljenost f-ja udaljenosti na skupu $\mathbb{R}^2$.

Rj. Trebamo pokazati da vrijede tri osobine iz definicije f-je udaljenosti. Neka su $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

(i) $d(P,Q) \geq 0$

Neka su $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$d_T(P,Q) = \underbrace{|x_1 - x_2|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\geq 0} \Rightarrow d_T(P,Q) \geq 0$$

vrijedi prva osobina

(ii) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

$$d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{|x_1 - x_2|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 0 \text{ i } |y_1 + y_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2 \Leftrightarrow P = Q$$

vrijedi druga osobina

(iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

$$d(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d(Q,P)$$

vrijedi treća osobina

(#) Neka su d_0 i d_1 dvije f-je udaljenosti na skupu $\mathcal{S}$. Dokazati da ako je $s \geq 0$ i $t > 0$ tada je $sd_0 + td_1$ također f-ja udaljenosti na $\mathcal{S}$.

Rj.

Kako su d_0 i d_1 f-je udaljenosti na $\mathcal{S}$ to $\forall P, Q \in \mathcal{S}$

$d_0(P,Q) \geq 0$, $d_1(P,Q) \geq 0$

$d_0(P,Q) = 0$ akko $P = Q$, $d_1(P,Q) = 0$ akko $P = Q$

$d_0(P,Q) = d_0(Q,P)$, $d_1(P,Q) = d_1(Q,P)$.

Pokažimo da f-ja $sd_0 + td_1$ zadovoljava tri osobine i definicije f-je udaljenosti. Označimo sa $d = sd_0 + td_1$ i neka su $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ proizvoljne tačke iz $\mathcal{S}$.

(i) $d(P,Q) \geq 0$

$$d(P,Q) = \underbrace{s}_{\geq 0}\underbrace{d_0(P,Q)}_{\geq 0} + \underbrace{t}_{> 0}\underbrace{d_1(P,Q)}_{\geq 0} \Rightarrow d(P,Q) \geq 0$$ vrijedi prva osobina

(ii) $d(P,Q) = 0$ akko $P = Q$

$$d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{s}_{\geq 0}\underbrace{d_0(P,Q)}_{\geq 0} + \underbrace{t}_{> 0}\underbrace{d_1(P,Q)}_{\geq 0} = 0 \xRightarrow{t>0} d_1(P,Q) = 0$$

$$\Rightarrow P = Q$$

S druge strane ako je $P = Q \Rightarrow d_0(P,Q) = 0$ i $d_1(P,Q) = 0 \Rightarrow d(P,Q) = 0$

vrijedi druga osobina

(iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

$$d(P,Q) = s\,d_0(P,Q) + t\,d_1(P,Q) = s\,d_0(Q,P) + t\,d_1(Q,P) = d(Q,P)$$ vrijedi treća osobina

F-ja $d = sd_0 + td_1$ je f-ja udaljenosti na $\mathcal{S}$.

(#) Neka je d f-ja udaljenosti na skupu $\mathcal{S}$, i definišimo f-ju $d': \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall P, Q \in \mathcal{S}$

$$d'(P,Q) = \frac{d(P,Q)}{1+d(P,Q)}$$

Dokažite da je d' također f-ja udaljenosti na $\mathcal{S}$. Primijetite da je $0 \le d'(P,Q) < 1$ $\forall P, Q \in \mathcal{S}$.

Rj.

(i) $d'(P,Q) \ge 0$ $\forall P, Q \in \mathcal{S}$

$P, Q \in \mathcal{S} \Rightarrow d(P,Q) \ge 0$ (zato što je d f-ja udaljenosti)

$1 + d(P,Q) \ge 0$

$\Rightarrow \dfrac{d(P,Q)}{1+d(P,Q)} \ge 0$ (s obzirom da je $d(P,Q) < 1 + d(P,Q)$ to je uvijek $0 \le \dfrac{d(P,Q)}{1+d(P,Q)} < 1$)

$\Rightarrow d'(P,Q) \ge 0$ vrijedi prva osobina

(ii) $d'(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

$$d'(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(P,Q)}{1+d(P,Q)} = 0 \Leftrightarrow d(P,Q) = 0 \overset{\substack{d\text{ je} \\ \text{f-ja udalj.}}}{\Longleftrightarrow} P = Q$$

vrijedi druga osobina

(iii) $d'(P,Q) = d'(Q,P)$

$$d'(P,Q) = \frac{d(P,Q)}{1+d(P,Q)} \overset{\substack{d\text{ f-ja} \\ \text{udalj.}}}{=\!=} \frac{d(Q,P)}{1+d(Q,P)} = d'(Q,P)$$

vrijedi treća osobina

d' je f-ja udaljenosti.

Definicija (surjektivna f-ja)

F-ju f sa A u B nazivamo na, ili surjektivna, ako i samo ako za svaki element $b \in B$ postoji element $a \in A$ sa osobinom $f(a) = b$. F-ja f se naziva surjekcija ako je na.

Napomena F-ja f je na ako $\forall y \, \exists x \, (f(x) = y)$, gdje je univerzum za x domen f-je, a univerzum za y koddomen f-je.

(#) Neka je $\mathscr{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathscr{L}_E\}$ Dekartova ravan i neka je $L_{m,b}$ neka ne-vertikalna prava. Definišimo f-ju $f: L_{m,b} \rightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$f(P) = f((x,y)) = x\sqrt{1+m^2}$$

gdje je $P(x,y)$, $P \in L_{m,b}$. Pokazati da je f-ja f sirjektivna.

Rj. Izaberimo proizvoljno $t \in \mathbb{R}$ i pokažimo da postoji tačka $P \in L_{m,b}$ takva da $f(P) = t$.

$$P \in L_{m,b} \Rightarrow y = mx + b$$

Za proizvoljno $t \in \mathbb{R}$, neka je $x = \dfrac{t}{\sqrt{1+m^2}}$.

$$P \in L_{m,b} \Rightarrow y = \frac{mt}{\sqrt{1+m^2}} + b.$$

Posmatrajmo tačku $P\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{mt}{\sqrt{1+m^2}} + b\right)$. Jasno je da $P \in L_{m,b}$. S druge strane

$$f(P) = \frac{t}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \sqrt{1+m^2} = t$$

F-ja f je sirjektivna.

Definicija (injektivna f-ja)

Za f-ju f kažemo da je jedan-na-jedan (1-1, injektivna) ako i samo ako $f(x)=f(y)$ povlači da je $x=y$ za sve x i y u domenu f-je f. Za f-ju kažemo da je injekcija ako je jedan-na-jedan.

Napomena F-ja f je jedan-na-jedan akko $f(x) \neq f(y)$ kadgod je $x \neq y$. Ovako rečena tvrdnja da je f 1-1 je dobijena uzimajući kontrapoziciju implikacije date u definiciji. Također, definiciju injektivne f-je možemo zapisati koristeći kvantifikatore

$$\forall x \ \forall y \ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

ili ekvivalentno

$$\forall x \ \forall y \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

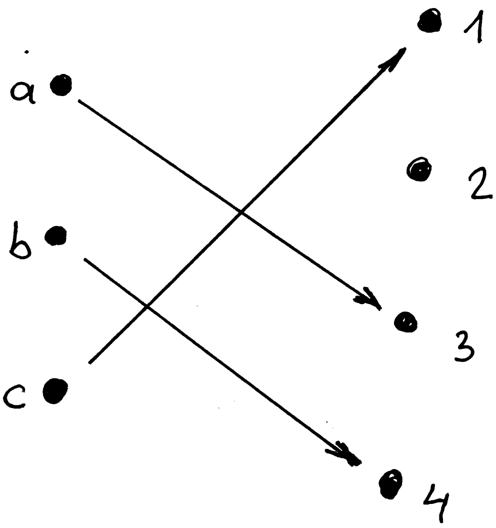
gdje je domen f-je univerzum na kojoj je f-ja definisana.

Definicija (bijekcija)

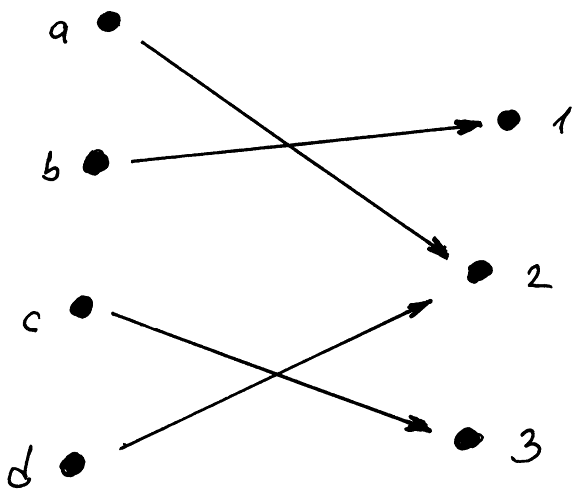
Za f-ju f kažemo da je bijekcija (ili da je 1-1 korespondencija) ako je oboje i 1-1 i na.

Primjeri različitih vrsta f-ja:

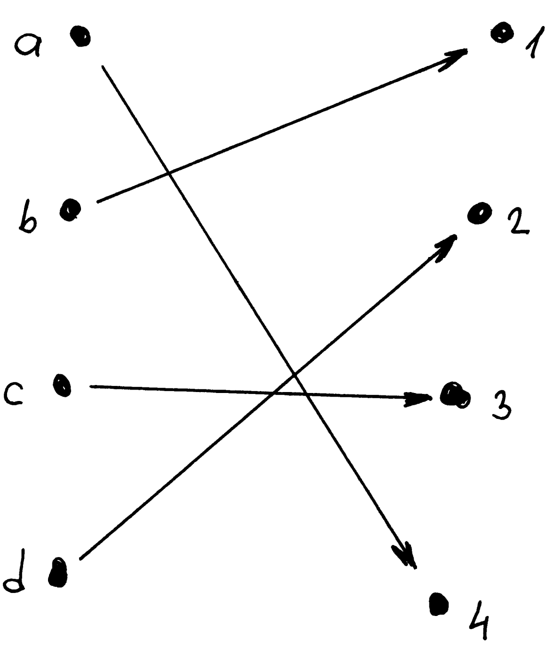
(a) jedan-na-jedan, nije na



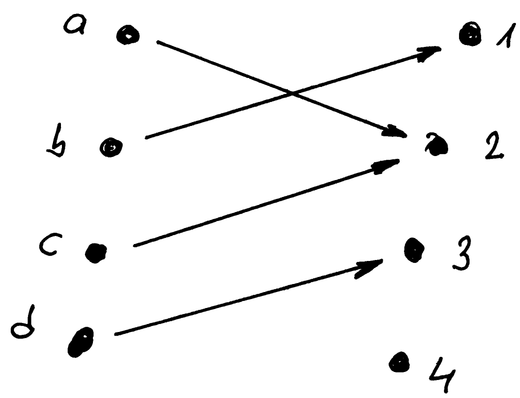
(b) na, nije jedan-na-jedan



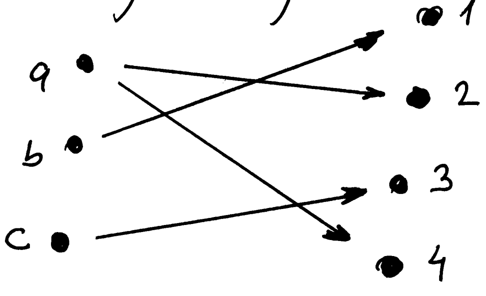
(c) jedan-na-jedan i na



(d) niti je 1-1, niti je na



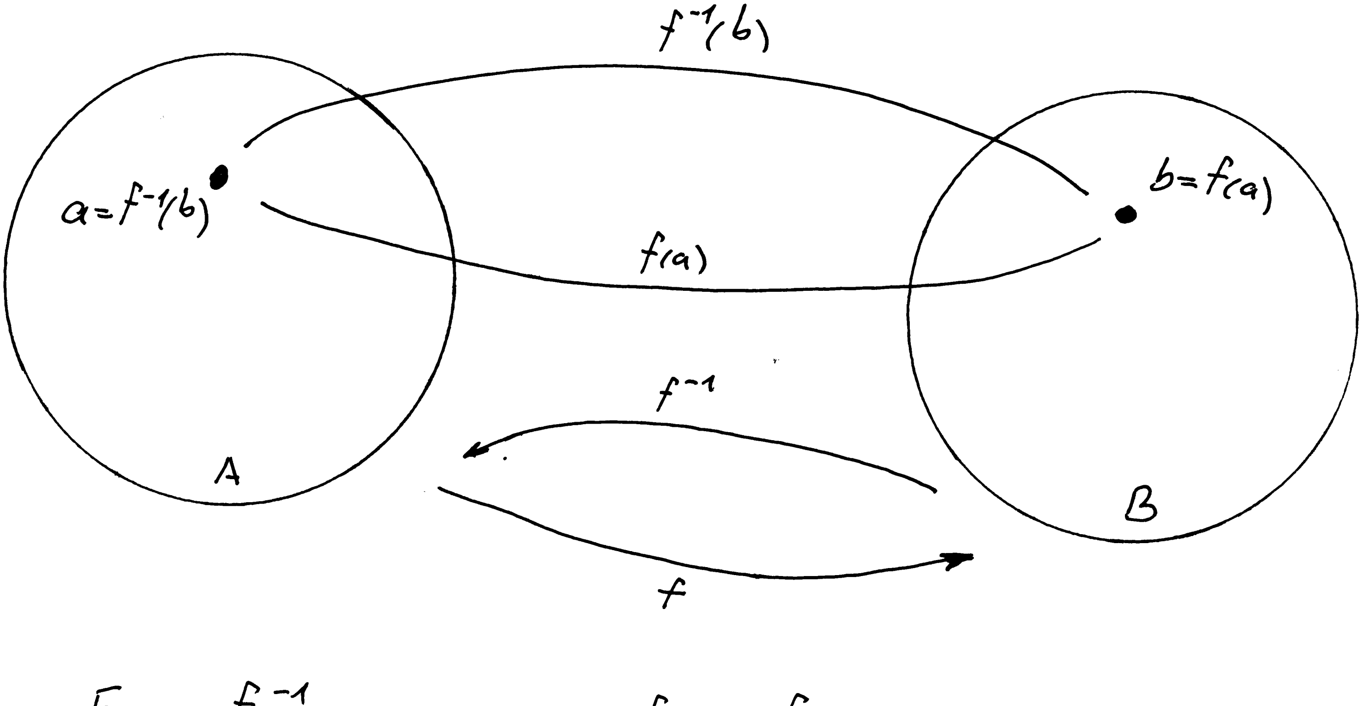
(e) nije f-ja



Definicija (inverzna f-ja)

Neka je f bijekcija sa skupa A u skup B. Inverzna f-ja od f je f-ja koja elementu b iz B pridružuje jedinstven element $a \in A$ koji ima osobinu da $f(a) = b$. Inverznu f-ju f-je f ćemo označavati sa f^{-1}. Time

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{kada je } f(a) = b.$$



F-ja f^{-1} je inverz f-je f

(#) Neka je $\mathcal{H}=\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ Poincaré-ova ravan i neka je ${}_aL$ prava tipa I. Data je f-ja $g: {}_aL \to \mathbb{R}$ definisana na sljedeći način

$$g(a, y) = \ln(y).$$

Pokazati da je f-ja g bijekcija te odrediti inverz od g.

Rj.

INJEKTIVNOST $(\forall P, Q \in {}_aL \quad P \neq Q \Rightarrow g(P) \neq g(Q))$

$P(a, y_1), Q(a, y_2) \in {}_aL, \quad P \neq Q$

$g(a, y_1) = \ln(y_1);$

$g(a, y_2) = \ln(y_2);$

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow \ln(y_1) \neq \ln(y_2) \Rightarrow g(a, y_1) \neq g(a, y_2)$$

g je injektivna

SURJEKTIVNOST $(\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists P \in {}_aL \text{ t.d. } g(P) = t)$

Neka je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljno i neka je $P(a, e^t)$ (jasno je da $P \in {}_aL$).

Tada $g(P) = g(a, e^t) = \ln(e^t) = t$

g je surjektivna

Da bi odredili inverz treba nam f-ja g^{-1} za koju vrijedi da je $g^{-1}(t) = (a, b)$ kadgod je $g(a, b) = t$.

Kako smo pokazali da je $g(a, e^t) = t$ to je

$$g^{-1}(t) = (a, e^t).$$

Neka je p prava iz geometrije incidencije $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ i neka je $f: p \to \mathbb{R}$ surjektivna f-ja za koju vrijedi

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in p$$

gdje je d f-ja udaljenosti na $\mathcal{S}$. Pokazati da je f bijekcija.

Rj.

S obzirom da je iz pretpostavke zadatka f-ja f surjektivna, trebamo još samo pokazati da je injektivna.

INJEKTIVNOST ($f(P) = f(Q) \Rightarrow P = Q$)

Pretpostavimo da je $f(P) = f(Q)$. Tada

$$d(P, Q) = |f(P) - f(Q)| = 0$$

tj $\quad d(P, Q) = 0$

Kako je d f-ja udaljenosti

$$d(P, Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad P = Q.$$

Definicija (sinh(t), cosh(t), tanh(t), sech(t))

F-je sinus hiperbolični, kosinus hiperbolični, tangens hiperbolični i sekant hiperbolični definišemo na sljedeći način:

$$sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \qquad ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2};$$

$$th(t) = \frac{sh(t)}{ch(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}; \qquad sech(t) = \frac{1}{ch(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

(#) Pokažite da za svaku vrijednost $t \in \mathbb{R}$

(i) $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$

(ii) $th^2(t) + sech^2(t) = 1.$

Rj.

(i) $$ch^2(t) - sh^2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2t} + 2e^0 + e^{-2t} - e^{2t} + 2e^0 - e^{-2t}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

čime smo pokazali prvu osobinu

(ii)

$$th^2(t) + sech^2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2t} - 2e^0 + e^{-2t}}{(e^t + e^{-t})^2} + \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} =$$

$$= \frac{e^{2t} + 2e^0 + e^{-2t}}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = 1$$

i time je pokazana druga osobina

(#) Neka je $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ Poincaré-ova ravan i neka je ${}_cL_r$ prava tipa II. Data je f-ja $f: {}_cL_r \to \mathbb{R}$ koja je definisana na sljedeći način

$$f(x,y) = \ln(x-c+r) - \ln(y)$$

Pokazati da je f bijekcija te odrediti inverz od f.

Rj.

SURJEKTIVNOST

Neka je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Pokažimo da postoji tačka $P(x,y)$ $(P \in {}_cL_r)$ takva da $f(x,y) = t$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = \ln(x-c+r) - \ln(y) \\ f(x,y) = t \end{array}\right\} \Rightarrow \ln \frac{x-c+r}{y} = t$$

$$\frac{x-c+r}{y} = e^t$$

$$\Rightarrow e^{-t} = \frac{y}{x-c+r} = \frac{y}{x-c+r} \cdot \frac{x-c-r}{x-c-r} = \frac{y(x-c-r)}{(x-c)^2 - r^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Kako je } P(x,y) \in {}_cL_r \\ \text{to } (x-c)^2 + y^2 = r^2 \\ \qquad \Downarrow \\ (x-c)^2 - r^2 = -y^2 \end{array} \right| = \frac{y(x-c-r)}{-y^2} = -\frac{x-c-r}{y}$$

tj. $e^{-t} = -\dfrac{x-c-r}{y}$.

Sad imamo $\quad e^t + e^{-t} = \dfrac{x-c+r}{y} - \dfrac{x-c-r}{y} = \dfrac{2r}{y}$

ili $\quad y = r\,\mathrm{sech}(t)$

Također je $\quad \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{\frac{x-c+r}{y} + \frac{x-c-r}{y}}{\frac{2r}{y}} = \dfrac{2(x-c)}{2r} = \dfrac{x-c}{r}$

ili $\quad x-c=r\tanh(t).$

Time smo dobili

$$y=r\,\mathrm{sech}(t) \qquad \text{tj. dobili smo tačku}$$
$$x-c=r\tanh(t) \qquad P(c+r\tanh t,\ r\,\mathrm{sech}(t))$$

Provjerimo da li $P\in {}_cL_r$ i da li $f(P)=t$.

$$(x-c)^2+y^2=r^2 \xrightarrow{P(c+r\tanh t,\ r\,\mathrm{sech}(t))} \underbrace{r^2\tanh^2 t+r^2\mathrm{sech}^2 t}_{r^2\underbrace{(\tanh^2 t+\mathrm{sech}^2 t)}_{=1}}=r^2$$

$$\Rightarrow P\in {}_cL_r$$

$$f(P)=\ln\left(c+r\tanh t-c+r\right)-\ln(r\,\mathrm{sech}(t))$$
$$=\ln\frac{\tanh t+1}{\mathrm{sech} t}=\ln\frac{\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}+1}{\frac{1}{\cosh(t)}}=\ln(\sinh(t)+\cosh(t))$$
$$=\ln\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\ln e^t=t \qquad \text{f-ja } f \text{ je surjektivna}$$

INJEKTIVNOST

Neka su $P(x_1,y_1)$ i $Q(x_2,y_2)$ tačke za koje vrijedi da $f(P)=f(Q)$
Označimo ovu zajedničku vrijednost sa t tj. $f(P)=t=f(Q)$.

$$f(P)=t \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=c+r\tanh(t) \\ y_1=r\,\mathrm{sech}(t) \quad \ldots(1)\end{array} \qquad f(Q)=t \Rightarrow \begin{array}{l} x_2=c+r\tanh(t) \\ y_2=r\,\mathrm{sech}(t) \quad \ldots(2)\end{array}$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow x_1=x_2 \text{ i } y_1=y_2 \Rightarrow P=Q$$

f-ja f je injektivna

f je bijekcija. Invers $f^{-1}(t)=(c+r\tanh t,\ r\,\mathrm{sech}(t))$.